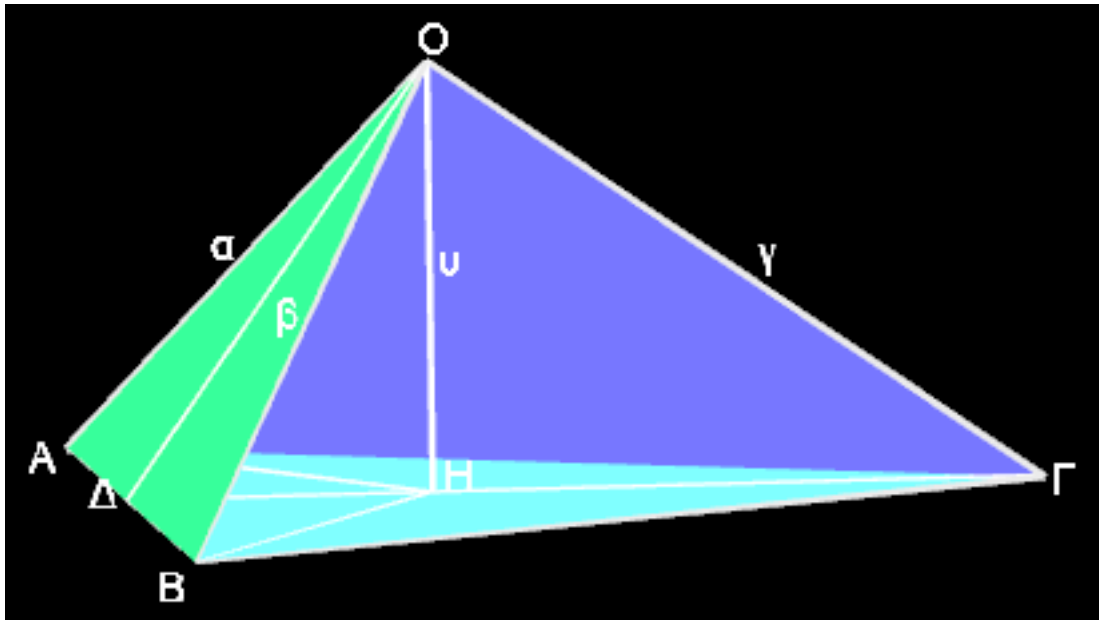


Άσκηση 3. Στο τετράπλευρο OABΓ οι έδρες γύρω από την κορυφή O είναι ορθογώνια τρίγωνα και λέγεται τρισορθογώνιο τετράεδρο. Η έδρα ABΓ λέγεται υποτείνουσα έδρα. Να δείξετε ότι:

1. Το τετράγωνο του εμβαδού μιας έδρας της τρισορθογωνίου τριέδρου είναι ίσο με το εμβαδό της υποτείνουσας έδρας επί την προβολή της πάνω στην υποτείνουσα.
2. Το τετράγωνο του εμβαδού της υποτείνουσας έδρας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των εμβαδών των άλλων εδρών (**Πυθαγόρειο θεώρημα στο τετράεδρο**)
3. Αν υ το ύψος προς την υποτείνουσα έδρα ισχύει $\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

Απόδειξη



1. Θεωρούμε την έδρα AOB, φέρουμε την OH κάθετη στην ABΓ, οπότε η προβολή της AOB στην ABΓ είναι η AHB. Θα δείξουμε τη σχέση $(AOB)^2 = (ABΓ)(AHB)$ (1)

Φέρουμε τη ΓΗ η οποία τέμνει την AB στο Δ. Επειδή οι γωνίες στην κορυφή O είναι ορθές έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} OG \perp OA \\ OG \perp OB \end{array} \right\} \text{ άρα } OG \perp (A, O, B) \text{ άρα } OG \perp AB$$

$$\left. \begin{array}{l} OG \perp AB \\ OH \perp (A, B, \Gamma) \text{ άρα } OH \perp AB \end{array} \right\} \text{ άρα } AB \perp (O, \Gamma, H) \text{ άρα } AB \perp \Delta\Gamma \text{ και } AB \perp O\Delta$$

Άρα στο τρίγωνο AOB η OΔ είναι ύψος, στο ABΓ η ΔΓ και στο AHB η ΔΗ, έτσι η (1) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{2} AB \cdot \Delta O \right)^2 = \frac{1}{2} AB \cdot \Delta\Gamma \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \Delta H \text{ ή } \Delta O^2 = \Delta\Gamma \cdot \Delta H$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής επειδή το τρίγωνο AOG είναι ορθογώνιο στο O και η ΔΗ είναι η προβολή της ΔΟ στην υποτείνουσα.

2. Σύμφωνα με το προηγούμενο έχουμε τις σχέσεις.

$$(AOB)^2 = (AB\Gamma)(AHB)$$

$$(AOG)^2 = (AB\Gamma)(AH\Gamma)$$

$$(BOG)^2 = (AB\Gamma)(BH\Gamma)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$(AOB)^2 + (AOG)^2 + (BOG)^2 = (AB\Gamma)^2 \quad (2)$$

3. Η ακμή $AO=a$ είναι ύψος του τετραέδρου από την κορυφή A , ύψη είναι επίσης και η $OB=\beta$ και $OG=\gamma$.

Αν V ο όγκος του τετραέδρου έχουμε:

$$V = \frac{1}{3}(AOB) \cdot \gamma \quad \text{ή} \quad (AOB) = \frac{3V}{\gamma}$$

Όμοια έχουμε $(AOG) = \frac{3V}{\beta}$, $(BOG) = \frac{3V}{\alpha}$, $(ABG) = \frac{3V}{v}$

Και η σχέση (2) γίνεται:

$$\frac{(3V)^2}{\gamma^2} + \frac{(3V)^2}{\beta^2} + \frac{(3V)^2}{\alpha^2} = \frac{(3V)^2}{v^2} \quad \text{άρα}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$