

2. Το πρόβλημα του πέτρινου μονοπατιού

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα αυτή δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με διαδικασίες 'οικοδόμησης' μιας αναδρομικής σχέσης, προκειμένου να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα κατασκευής. Η δραστηριότητα είναι δομημένη με τέτοιο τρόπο, ώστε να οδηγηθούν σταδιακά στη σχέση που θα χρησιμοποιήσουν, για να λύσουν το πρόβλημα, καθώς και σε αναπροσαρμογή της σχέσης αυτής, προκειμένου να ξεπεράσουν τα προβλήματα που δημιουργούνται από την εκάστοτε αλλαγή των δεδομένων του προβλήματος.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Είναι ένα πρόβλημα που μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Α' Λυκείου και συγκεκριμένα, στην ενότητα των προόδων. Μπορεί όμως να δοθεί και σε οποιαδήποτε τάξη του Γυμνασίου (εκτός της Α') και του Λυκείου σαν μια ανεξάρτητη εργαστηριακή δραστηριότητα στο μάθημα των Μαθηματικών.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να εμπλακούν σε διαδικασίες δημιουργίας αναδρομικής σχέσης.
- > Να μπορούν να αναπροσαρμόζουν τη σχέση αυτή, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος.
- > Να διερευνήσουν την ορθότητα της σχέσης που δημιούργησαν.
- > Να συνδέσουν ένα πρόβλημα κατασκευής με τις μαθηματικές έννοιες που το διέπουν.

Επιπροσθέτως, η ασχολία με μία τέτοια δραστηριότητα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές αφ' ενός μεν να συνδέσουν τα μαθηματικά με την καθημερινή τους ζωή, αφ' ετέρου δε να συνειδητοποιήσουν ότι σε ένα πρόβλημα μπορούν να υπάρξουν διαφορετικές σωστές λύσεις. Επίσης μπορούν να διαπιστώσουν τη δυνατότητα που τους παρέχεται από το λογισμικό να επιλύουν εύκολα και γρήγορα ένα πρόβλημα στην περίπτωση αναπροσαρμογής των δεδομένων του.

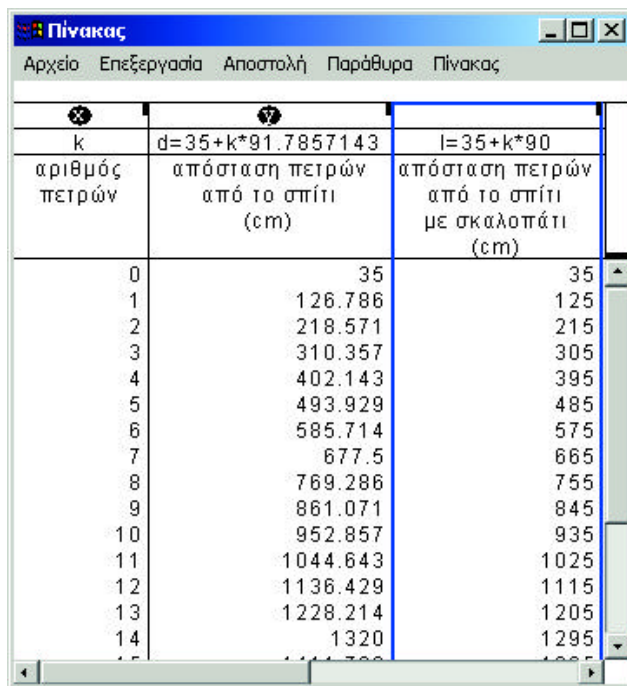
Παρατηρήσεις

1. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε, εφ' όσον είναι δυνατόν, να συνδεθεί με μια ανάλογη κατασκευή που να μπορεί να γίνει στο χώρο του σχολείου (στην αυλή, στους αθλητικούς χώρους κτλ).
2. Το σχέδιο στο χαρτί για την τοποθέτηση των πετρών είναι μια αναγκαία ενέργεια πριν από τη χρήση του λογισμικού. Με τη βοήθεια του σχεδίου οι μαθητές θα οδηγηθούν σταδιακά στη γενίκευση της σχέσης που θα χρησιμοποιήσουν, στο παράθυρο 'Πίνακας' ή στην 'Αριθμομηχανή'. Θα βοηθούσε επίσης και η κατασκευή ενός πίνακα στο τετράδιο, σαν αυτόν που φαίνεται παρακάτω. (Εδώ έχουμε πάρει την απόσταση από το σπίτι ίση με 35 cm και έχουμε συμβολίσει την απόσταση μεταξύ των πετρών με x .) Θα ήταν χρήσιμο η κάθε ομάδα να επιλέξει δική της απόσταση της πρώτης πέτρας από το σπίτι ούτως ώστε να τονιστεί η ύπαρξη διαφορετικών λύσεων σε ένα πρόβλημα.

3. Προτείνεται να δουλέψει κάθε ομάδα με τις δικές της επιλογές (απόσταση πετρών), ούτως ώστε να γίνει αντιληπτό ότι σε ένα τέτοιο πρόβλημα μπορούν να υπάρχουν πολλές διαφορετικές λύσεις.

Πέτρα	Απόσταση πέτρας από το σπίτι
1	35
2	$35+30+x$
3	$35+30+x+30+x=35+2(30+x)$
4	$35+2(30+x)+30+x=35+3(30+x)$
5	
6	
7	$35+6(30+x)$
15	$35+14(30+x)$

4. Στην εικόνα 1, φαίνεται ο πίνακας που φτιάξαμε στο Function Probe, για να απαντήσουμε στα ερωτήματα 7 και 12. Αριθμήσαμε τις πέτρες από 0-14 και φτιάξαμε τις σχέσεις $14x+30*15+35=1350$ (χωρίς σκαλοπάτι) και $14x+30*15+35=1325$ (με σκαλοπάτι), προκειμένου να υπολογίσουμε το x ($x=61,7857143$ στην πρώτη περίπτωση και το $x=60$ στη δεύτερη).



k	d=35+k*91.7857143	l=35+k*90
αριθμός πετρών	απόσταση πετρών από το σπίτι (cm)	απόσταση πετρών από το σπίτι με σκαλοπάτι (cm)
0	35	35
1	126.786	125
2	218.571	215
3	310.357	305
4	402.143	395
5	493.929	485
6	585.714	575
7	677.5	665
8	769.286	755
9	861.071	845
10	952.857	935
11	1044.643	1025
12	1136.429	1115
13	1228.214	1205
14	1320	1295

εικόνα 1

5. Στην εικόνα 2, η τέταρτη στήλη του πίνακα φτιάχτηκε θεωρώντας την απόσταση μεταξύ των πετρών ίση με το μισό της προηγούμενης στήλης και βρήκαμε ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσει 20 πέτρες συμπληρώνοντας την πρώτη στήλη (από το 14 και κάτω), μέχρι το αντίστοιχο κελί της τέταρτης στήλης να μας δείξει την τιμή 1295.
6. Προτείνεται στο τέλος της δραστηριότητας κάθε ομάδα να παρουσιάσει την εργασία της στις άλλες ομάδες της τάξης και να συζητήσουν όλοι για την πορεία της διερεύνησης που ακολούθησαν.

Πίνακας			
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρο Πίνακας			
k	$d=35+k*91.7857143$	$l=35+k*90$	$m=35+k*60$
αριθμός πειρών	απόσταση πειρών από το σπίτι (cm)	απόσταση πειρών από το σπίτι με σκαλοπάτι (cm)	απόσταση πειρών από το σπίτι (μισή μεταξύ πειρών)
0	35	35	35
1	126.786	125	95
2	218.571	215	155
3	310.357	305	215
4	402.143	395	275
5	493.929	485	335
6	585.714	575	395
7	677.5	665	455
8	769.286	755	515
9	861.071	845	575
10	952.857	935	635
11	1044.643	1025	695
12	1136.429	1115	755
13	1228.214	1205	815
14	1320	1295	875
15	1411.786	1385	935
16	1503.571	1475	995
17	1595.357	1565	1055
18	1687.143	1655	1115
19	1778.929	1745	1175
20	1870.714	1835	1235
21	1962.5	1925	1295

εικόνα 2

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος

Ας υποθέσουμε ότι η ηλικιωμένη γειτόνισσά σου, η κυρία Αγνή Γέρου, σου ζητάει να στρώσεις ένα μονοπάτι από πέτρες μέσα στην αυλή της, ξεκινώντας από την πίσω πόρτα του σπιτιού της και καταλήγοντας σε μια σκάφη για πουλιά, η οποία βρίσκεται 13,5 m μακρύτερα. Για το σκοπό αυτό, η ίδια έχει αγοράσει δεκαπέντε στρογγυλές πέτρες, διαμέτρου 30 cm η καθεμία. Θα ήθελε να τις τοποθετήσεις ομοιόμορφα στην αυλή, ώστε η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες να είναι παντού η ίδια και με τέτοιον τρόπο, ώστε η τελευταία πέτρα να ακουμπάει στη σκάφη για τα πουλιά. Μπορείς να καθορίσεις μόνος σου την απόσταση ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και την πόρτα του σπιτιού και δεν πειράζει να διαφέρει από την απόσταση που έχουν οι υπόλοιπες πέτρες μεταξύ τους. Πριν πας λοιπόν στο σπίτι της, για να κάνεις την δουλειά, κάνεις ένα σχέδιο με τις 15 πέτρες που ξεκινούν από το σπίτι της κυρίας Αγνής και καταλήγουν στη σκάφη για τα πουλιά.

1. Πόσο θα αφήσεις ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και την πόρτα του σπιτιού;
2. Σε ποια απόσταση θα τοποθετήσεις τη μια πέτρα μετά την άλλη, ώστε να χρησιμοποιήσεις και τις δεκαπέντε, προκειμένου να φτάσεις τη σκάφη για τα πουλιά;

3. Πόσο θα απέχει η αρχή της τρίτης πέτρας από το σπίτι;
4. Πόσο θα απέχει η αρχή της πέμπτης πέτρας από το σπίτι;
5. Της δέκατης πέτρας; Της δέκατης τέταρτης πέτρας;
6. Περιγράψε την μέθοδο που ακολούθησες, για να απαντήσεις στις ερωτήσεις 3-5.
7. Κατασκεύασε έναν πίνακα στο Function Probe, για να δείξεις πόσο απέχει κάθε μια από τις δεκαπέντε πέτρες από το σπίτι. Η μια στήλη θα περιλαμβάνει τους αριθμούς από 1 ως 15 και η δεύτερη την απόσταση του σπιτιού από την πρώτη πέτρα, από τη δεύτερη πέτρα κτλ. Μολονότι μπορείς να πληκτρολογήσεις τις τιμές της δεύτερης στήλης μια - μια, το Function Probe έχει τρόπους να σε βοηθήσει. Μπορείς α) να γεμίσεις τη στήλη χρησιμοποιώντας την εντολή 'Γέμισμα' β) να πληκτρολογήσεις έναν τύπο στη σειρά μεταβλητών/τύπων γ) να δημιουργήσεις ένα κουμπί στην 'Αριθμομηχανή' και να χρησιμοποιήσεις την εντολή 'Τιμή σε Πίνακα' του μενού 'Αποστολή', κτλ. (Θα πάρεις επιπλέον βαθμό για κάθε νέο τρόπο που μπορείς να βρεις για να συμπληρώσεις τη στήλη).

Β' Μέρος

Έχοντας κάνει όλους τους υπολογισμούς σου σε χαρτί, πηγαίνεις στο σπίτι της κυρίας Αγνής, για να ξεκινήσεις το στρώσιμο του μονοπατιού. Όμως, ανακαλύπτεις με έκπληξη ότι έξω από την πίσω πόρτα της γειτονιάς σου υπάρχει ένα τσιμεντένιο σκαλοπάτι με πλάτος 25 cm. Δεδομένου ότι θέλεις να χρησιμοποιήσεις και τις δεκαπέντε πέτρες, αντιλαμβάνεσαι ότι θα πρέπει να προσαρμόσεις την απόσταση που αρχικά υπολόγισες ότι θα έχουν οι πέτρες μεταξύ τους, αφού μειώθηκε η ολική απόσταση σπιτιού και σκάφης.

8. Πόσο θα αφήσεις ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και το σκαλοπάτι;
9. Ποια θα είναι τώρα η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες;
10. Πόσο απέχει πλέον η αρχή της πρώτης πέτρας από το σπίτι;
11. Πόσο απέχει η αρχή της έβδομης πέτρας από το σπίτι; Της δωδέκατης;
12. Προκειμένου να διευκολυνθείς στον υπολογισμό της απόστασης οποιασδήποτε πέτρας του μονοπατιού από το σπίτι, δημιούργησε ένα κουμπί στην 'Αριθμομηχανή', το οποίο θα την υπολογίζει. Ή γράψε έναν τύπο που θα εκφράζει την απόσταση του σπιτιού από μια πέτρα και χρησιμοποίησέ τον για να γεμίσεις μια στήλη του πίνακα.

Γ' Μέρος

Η κυρία Αγνή περπάτησε στο μονοπάτι που έστρωσες και θεωρεί ότι η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες είναι πολύ μεγάλη για το διασκελισμό της. Θα ήθελε λοιπόν να προσθέσει μερικές πέτρες, ώστε να μειωθεί στο μισό η απόσταση που υπάρχει τώρα ανάμεσά τους. Περιμένει λοιπόν από σένα να υπολογίσεις πόσες πέτρες θα χρειαστούν, να τις αγοράσεις και να διορθώσεις το μονοπάτι.

13. Πόσο απέχει τώρα η πρώτη πέτρα από το σπίτι (η αρχή της);
14. Ποια θα είναι η καινούρια απόσταση ανάμεσα στις πέτρες; Πόσες επιπλέον πέτρες θα χρειαστείς;
15. Πόσο θα απέχει η αρχή της έβδομης πέτρας από το σπίτι; Της δέκατης πέτρας;
16. Δημιούργησε ένα κουμπί στην 'Αριθμομηχανή' με το οποίο θα εισάγεις τον αριθμό μιας πέτρας

και θα παίρνεις ως αποτέλεσμα την απόσταση αυτής της πέτρας από το σπίτι.

17. Κατάστρωσε έναν πίνακα που να δείχνει την απόσταση κάθε πέτρας από το σπίτι. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις έναν τύπο για να εισάγεις τις αποστάσεις ή το κουμπί που δημιουργήσες στο προηγούμενο ερώτημα.
18. α) Εάν χρησιμοποίησες τύπο, για να γεμίσεις τον πίνακα του ερωτήματος 16, να αναγνωρίσεις τον πολλαπλασιαστή και τον προσθετέο στον τύπο σου. Όσον αφορά τις διαστάσεις του μονοπατιού, δηλαδή το πλάτος που έχουν οι πέτρες, την απόσταση ανάμεσά τους, το τιμεντένιο σκαλοπάτι κτλ., να περιγράψεις τι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή και τι στον προσθετέο στον τύπο σου. β) Εάν χρησιμοποίησες κουμπί της 'Αριθμομηχανής' για να γεμίσεις τον πίνακα του ερωτήματος 16, να αναγνωρίσεις τον πολλαπλασιαστή και τον προσθετέο στην καταχωρημένη σειρά της πληκτρολόγησης που ακολούθησες για να δημιουργήσεις το κουμπί. Όσον αφορά τις διαστάσεις του μονοπατιού, δηλαδή το πλάτος που έχουν οι πέτρες, την απόσταση ανάμεσά τους, το τιμεντένιο σκαλοπάτι κτλ., να περιγράψεις τι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή και τι στον προσθετέο στην πληκτρολόγησή σου.